Chapitre 4 Logarithme népérien et exponentielle de base e

page 105

I. LOGARITHME NÉPÉRIEN

A. Fonction

ln : $x \to$ ln x

• définie sur] 0 ; $+\infty$ [;
•
•

B. Valeurs remarquables

• ln 1 = 0
• ln e = 1 avec e = 2,718…

C. Propriétés

• $\ln ab = \ln a + \ln b$

• $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

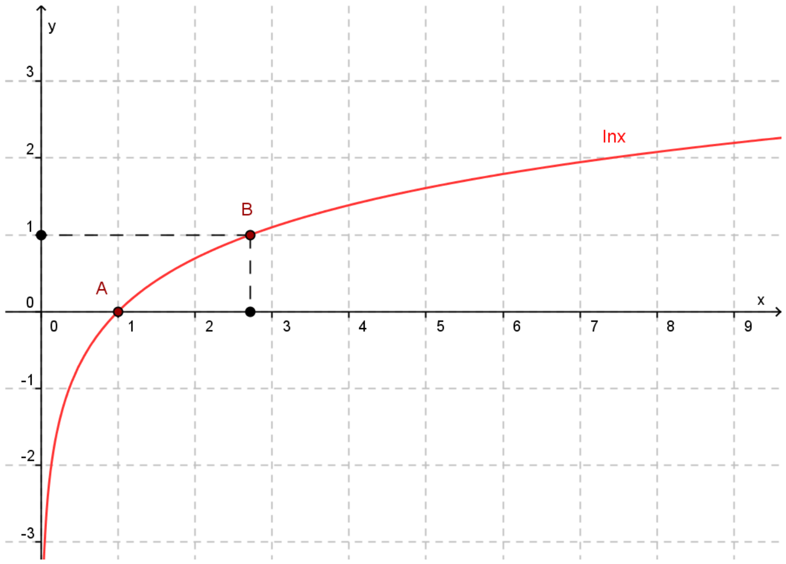
• $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$

• $\ln a^n = n \ln a$
• $\ln e^x = x$

D. Relation entre logarithme népérien et logarithme décimal

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

E. Représentation graphique



II. EXPONENTIELLE DE BASE e

A. Fonction

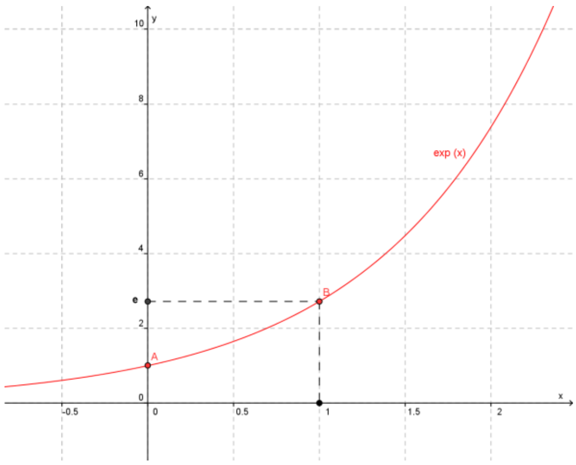
exp : $x \to e^x$

• définie sur $]-\infty\,;+\infty[$
• avec e tel que ln e = 1

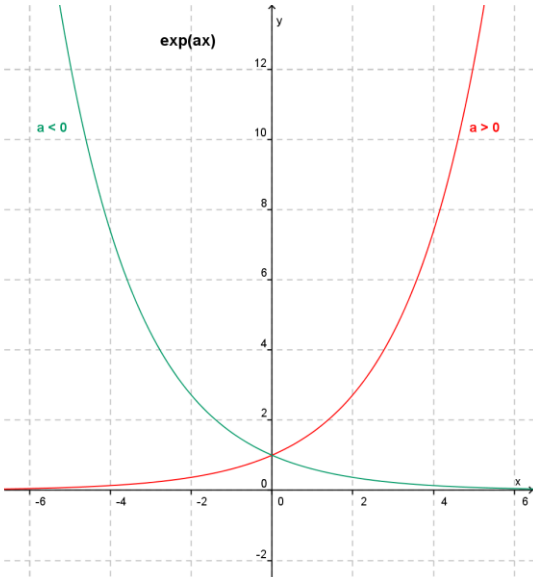
Remarque : pour tout x, $e^x > 0$.

B. Représentation graphique

exp : $x \to e^x$



exp : $x \to e^{ax}$



C. Propriétés opératoires

• $e^{x+y} = e^x \times e^y$

• $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

• $e^{-y} = \dfrac{1}{e^y}$

• $\left(e^x\right)^y = e^{xy}$

III. RÉCIPROCITÉ DES FONCTIONS $x \to \ln x$ ET $x \to e^{x}$

Propriétés

- pour tout x, $\ln e^x = x$,
- pour $x > 0$, $e^{\ln x} = x$.

Les fonctions logarithme de base e ($x \to \ln x$) **et exponentielle de base e** ($x \to e^x$) sont des fonctions réciproques.

Les représentations graphiques des fonctions logarithme népérien ($x \to \ln x$) et exponentielle de base e ($x \to e^{x}$) sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

IV. RÉSOLUTIONS D'ÉQUATIONS

L'équation $e^{ax} = b$ (avec b > 0) a pour solution : $x = \frac{\ln b}{a}$.

L'équation $\ln ax = b$ (avec $a > 0$ et $x > 0$) a pour solution : $x = \frac{e^b}{a}$.

V. Applications page 103 à 104 exercices 4, 8, 9, 12, 14, 19, 20, Testez-vous ! problèmes 25 et 28

Correction 25 périmètre crânien page 104

1. $P(4) = 35 + 3 \ln 9$; $P(4) \approx 41{,}6$. Le périmètre crânien d'un enfant de 4 mois mesure environ 41,6 cm.

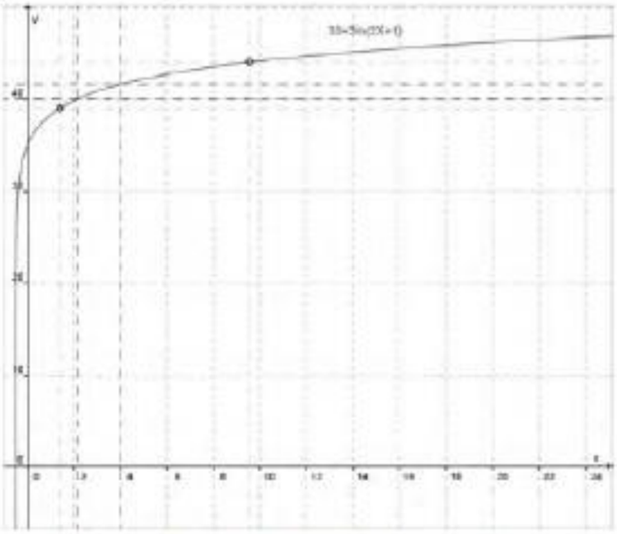
2. **a.** $f'(x) = (35 + 3 \ln(2x + 1))' = 3 \times \dfrac{2}{2x+1}$;

$f'(x) = \dfrac{6}{2x+1}$. Sur $[0\ ;\ 24]$, $f'(x) > 0$.

b.

x	0 24
Signe de $f'(x)$	+
Variation de f	35 ↗ 46,7

c. Configuration de la fenêtre de traçage :
x min $= -1$; x max $= 25$; pas $= 1$; y min $= 30$; y max $= 50$; pas $= 1$.



La courbe obtenue confirme que f est croissante sur $[0\ ;\ 24]$.

3. **a.** À l'aide du curseur **TRACE**, pour $x = 4$, on obtient $f(x) \approx 41{,}6$.

b. De manière analogue, on lit que $f(x) = 40$ correspond à 2,1 mois (2 mois et 3 jours).

c. Un périmètre crânien compris entre 39 et 44 cm correspond à une tranche d'âge de 1 mois et demi (1,5 mois) à 9 mois et demi (9,5 mois).

Exercice 30 Taux d'anticorps page 115

1. **a.** $t = 0$; $C_0 = 12$. À la naissance, le taux d'anticorps d'un enfant correspond à 12 g/L.

b. $t = 2$; $C_2 \approx 12{,}6$ g/L.

2. **a.** $f'(x) = 12 - 12 \times \dfrac{3}{3x+1}$.

b. $f'(x) = 0 \Rightarrow 12 \times \dfrac{3}{3x+1} = 12 \Rightarrow \dfrac{3}{3x+1} = 1$

$\Rightarrow 3x + 1 = 3 \Rightarrow x = \dfrac{2}{3}$.

c. $f'(x) = \dfrac{12(3x+1-3)}{3x+1}$ d'où $f'(x) = \dfrac{12(3x-2)}{3x+1}$.

d.

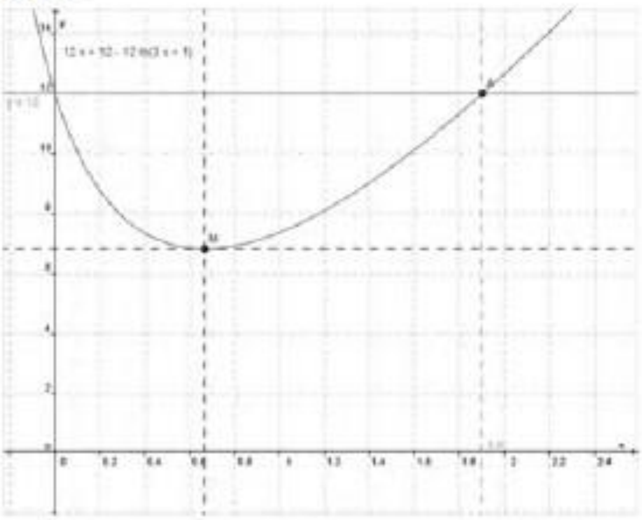
x	0		2/3		2
$3x-2$		−	0	+	
$3x+1$		+		+	
$f'(x) = \dfrac{12(3x-2)}{3x+1}$		−	0	+	

e.

x	0		2/3		2
$f'(x)$		−		+	
$f(x)$	12	↘	6,8	↗	12,6

f. f atteint son minimum pour $x = \dfrac{2}{3}$; ce minimum est 6,8.

3. **a. à e.**



La courbe confirme que la fonction f est :

- décroissante sur $[0 ; \frac{2}{3}[$;
- croissante sur $[\frac{2}{3} ; 2]$.

4. **a.** Le minimum de f permet de déterminer que le taux minimal d'anticorps pour un jeune enfant est de 6,8 g/L. Ce taux est atteint par un enfant de 8 mois (soit aux 2/3 de sa première année).

b. En utilisant la représentation graphique de f, on lit qu'un jeune enfant retrouve un taux d'anticorps identique à celui de sa naissance à 1,9 an, c'est-à-dire vers 1 an et 11 mois.

Exercice 33 Fromage de chèvre artisanal page 116

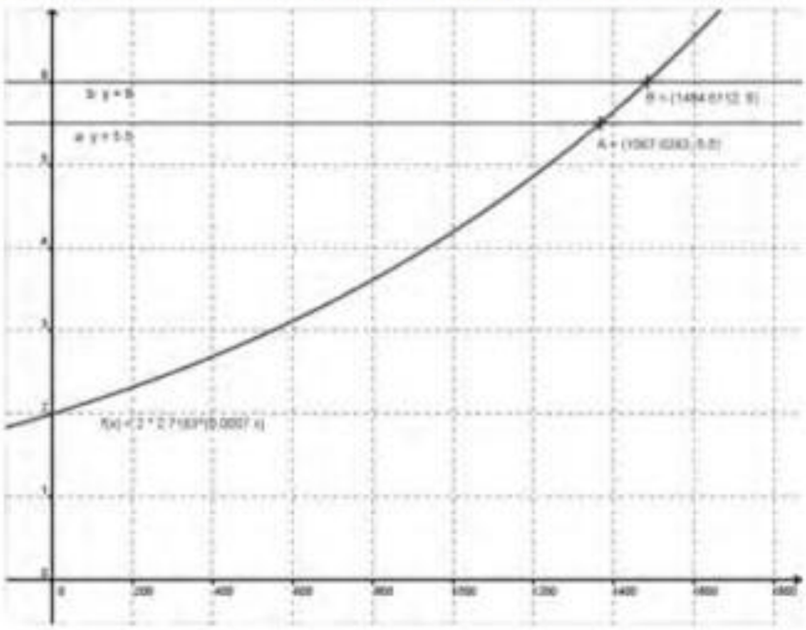
1. $C(0) = C_0 e^{0t} = C_0$ donc $C(0) = C_0 = 2$g/L.

2. $C(300) = 2e^{300k} = 2{,}5$ d'où $e^{300k} = 1{,}25$. Cette équation devient : $\ln e^{300k} = \ln 1{,}25$ d'où $300k = \ln 1{,}25$. Finalement $k \approx 0{,}00074$.

3. $C(360) = 2e^{360\times 0{,}00074}$ d'où $C(360) \approx 2{,}6$ g/L.
$C(720) = 2e^{720\times 0{,}00074}$ d'où $C(720) \approx 3{,}4$ g/L.

4. **a.** $2e^{0{,}00074t} = 5{,}5$ d'où $e^{0{,}00074t} = 2{,}75$.
Cette équation devient : $\ln e^{0{,}00074t} = \ln 2{,}75$,
d'où $t = \dfrac{\ln 2{,}75}{0{,}00074}$. Finalement $t \approx 1\,367$ min,
soit 22 h et 46 min (environ 23 h).
De manière identique $\ln e^{0{,}00074t} = \ln 3$; $t = \dfrac{\ln 3}{0{,}00074}$;
$t = 1\,485$ min soit 24 h et 44 min (soit environ 25 h).
Le lait caillé du « Petit Cochin » devra être moulé entre vingt-trois et vingt-cinq heures après le début de fabrication.

b. Vérification avec les abscisses des points A et B soit 1 367 (environ 23 h) et 1 484 (environ 25 h).

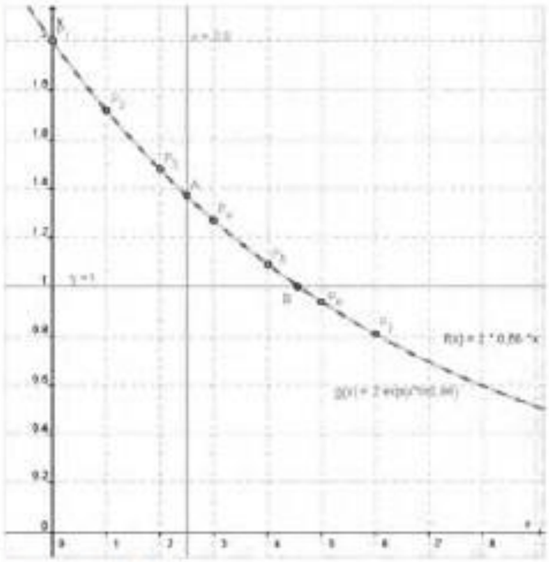


23 Élimination d'une substance médicamenteuse

1. a. $\frac{1,72}{2} = 0,86$; $\frac{1,48}{1,72} \approx 0,86$; $\frac{1,27}{1,48} \approx 0,86$;
$\frac{1,09}{1,27} \approx 0,86$; $\frac{0,94}{1,09} \approx 0,86$; $\frac{0,81}{0,94} \approx 0,86$.

La quantité de substance présente dans le sang peut être modélisée par une suite géométrique de 1^er^ terme 2 et de raison 0,86.

b.



c. $v_n = 2 \times 0,86^n$.

2. a. Voir tableau ci-après, question 5.a.

b. La représentation graphique de f passe par tous les points constitués par les termes de la suite géométrique modélisée.

3. a. Par lecture du graphique, on trouve que le patient présente 1,37 cm^3 de substance médicamenteuse 2 h 30 min après l'injection (point A).

b. 4 h 33 min après l'injection, il restera la moitié (1 cm^3) de la substance médicamenteuse initialement injectée.